

ЛМИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии



/ Семенов Е.М./

11.04.2022 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.О.14 Комплексный анализ**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

01.03.01 Математика

**2. Профиль подготовки/специализация:** Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, Математические модели гидродинамики.

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** теории функций и геометрии

**6. Составители программы:**

Шабров – доктор физ.-мат. наук, профессор;

Стенюхин Л.В. – кандидат физ.-мат. наук, доцент.

**7. Рекомендована:** НМС Математического ф-та  
протокол № 0500-03 от 24.03.2022 г.

**8. Учебный год:** 2023/2024

**Семестр:** 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### Цели изучения дисциплины:

- подготовка студента к восприятию математического аппарата специальных дисциплин, чтению специальной литературы;
- получение базовых знаний и формирование основных навыков по комплексному анализу, необходимых для решения задач, возникающих в теоретических и прикладных исследованиях;
- развитие логического мышления;
- формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания других математических дисциплин, таких как уравнения математической физики, функциональный анализ, специальные разделы алгебраической топологии, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория вероятностей, вычислительная математика, прикладные дисциплины (гидро- и аэромеханика, теория упругости, теория автоматического регулирования).

### Задачи дисциплины:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов сущности научного подхода, специфики математики, ее роли в развитии других наук;
- овладение студентами основными математическими понятиями комплексного анализа;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Комплексный анализ» является базовой дисциплиной математического цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 01.03.01 «Математика» (бакалавриат). Дисциплина «Комплексный анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса «Математика» или соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования, использующих соответствующие количественные методы, а также курсов математического анализа и логики.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки являются основанием для успешного изучения как дальнейших базовых курсов – функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, так и специальных курсов, например, теории функций многих комплексных переменных, спектральной теории операторов; приобретенные знания могут также помочь в научно-исследовательской работе.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними  УК-1.2 Используя логико-методологический инструментарий, критически оценивает надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей

		предметной области
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК-1.1 Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук</p> <p>ОПК-1.2 Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики</p> <p>ОПК-1.3 Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p> <p>знать: основные понятия, их свойства в области комплексного анализа</p> <p>Уметь: использовать фундаментальные знания комплексного анализа</p> <p>владеть (иметь навык(и)): формулами комплексного анализа</p>

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.** (в соответствии с учебным планом) — 7/ 252.

**Форма промежуточной аттестации** зачет / экзамен.

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		4 семестр	№ семестра	...
Аудиторные занятия	102	102		
в том числе: лекции	34	34		
практические	68	68		
лабораторные				
Самостоятельная работа	114	114		
Форма промежуточной аттестации (зачет – 15 час /экзамен – 21час.)	36	36		
Итого:	252	252		

#### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Комплексные числа. Комплексная плоскость.	Комплексные числа, комплексная плоскость; модуль и аргумент комплексного числа, их свойства; числовые последовательности и их пределы, ряды; стереографическая проекция, ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость; множества на плоскости, области и кривые.
2	Функции комплексного переменного и отображения	Функции комплексного переменного; предел функции; непрерывность, модуль непрерывности; дифференцируемость по комплексному переменному, условия

	множеств.	Коши-Римана; аналитическая функция; геометрический смысл аргумента и модуля производной; понятие о конформном отображении.
3	Элементарные функции.	Целая линейная и дробно-линейная функции, их свойства, общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг; экспонента и логарифм, степень с произвольным показателем; понятие о римановой поверхности на примерах логарифмической и общей степенной функций; функция Жуковского; тригонометрические и гиперболические функции.
4	Интеграл по комплексному переменному.	Интеграл по комплексному переменному, его простейшие свойства, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода; сведение к интегралу по действительному переменному; первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница; переход к пределу под знаком интеграла; интегральная теорема Коши.
5	Интеграл Коши.	Интегральная формула Коши; бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных; теорема Мореры.
6	Последовательности и ряды аналитических функций.	Последовательности и ряды аналитических функций в области: теорема Вейерштрасса; степенные ряды; теорема Абеля, формула Коши-Адамара; разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения; неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда; действия со степенными рядами.
7	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	Нули аналитической функции, порядок нуля; теорема единственности для аналитических функций; принцип максимума модуля и лемма Шварца.
8	Ряд Лорана.	Ряд Лорана, область его сходимости; разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения; неравенства Коши для коэффициентов; теорема Лиувилля и теорема об устранимой особой точке.
9	Изолированные особые точки однозначного характера.	Классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенно особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая.
10	Вычеты, принцип аргумента.	Определение вычета, теоремы Коши о вычетах, вычисления вычетов; применения вычетов; логарифмический вычет, принцип аргумента; теорема Руше и теорема Гурвица.
11	Отображения посредством аналитических функций.	Принцип открытости и принцип области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальной однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (обратный принцип соответствия границ); дробно-линейность однолистных конформных отображений круговых областей друг на друга; теорема Римана (без доказательства) и понятие о соответствии границ при конформном отображении.
12	Аналитическое продолжение.	Аналитическое продолжение по цепи и по кривой; полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса, ее риманова поверхность и особые точки; теорема о монодромии; аналитическое продолжение через границу области, принцип симметрии. Целые и мероморфные функции: целые функции, их порядок и тип; произведение Вейерштрасса; мероморфные функции; функции, мероморфные в расширенной плоскости.
13	Гармонические функции.	Гармонические функции на плоскости, их связь с аналитическими функциями; бесконечная дифференцируемость гармонических функций; аналитичность комплексно сопряженного градиента; теорема о среднем, теорема единственности и принцип максимума-минимума; инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных; теорема Лиувилля и теорема Харнака об устранимой особой точке; интегралы Пуассона и Шварца; разложение гармонических функций в ряды, связь с тригонометрическими рядами; задача Дирихле, применение конформных отображений для ее решения; гидромеханическое истолкование гармонических и аналитических функций.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Комплексные числа. Комплексная плоскость	6	6		9	21
02	Функции комплексного переменного и отображение множеств	6	6		9	21
03	Элементарные функции	4	4		9	17
04	Интеграл по комплексному переменному.	2	8		9	19
05	Интеграл Коши.	2	4		9	15
06	Последовательности и ряды аналитических функций.	4	6		9	19
07	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	0	5		9	14
08	Ряд Лорана.	2	6		9	17
09	Изолированные особые точки однозначного характера.	2	4		9	15
10	Вычеты, принцип аргумента.	6	8		9	23
11	Отображения посредством аналитических функций.	0	6		8	14
12	Аналитическое продолжение.	0	3		8	11
13	Гармонические функции.	0	2		8	10
Итого		34	68		114	252

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

#### а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат - М: Наука, 2002. - 736 с.
2	Свешников А.Г. Теория функций комплексного переменного / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов - М.: Наука, 2001. - 320 с.
3	Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для студ.вузов / Л.И. Волковыский, Г.Л.Луниц, И.Г.Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. - 312 с.
4	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного //Изд-во «Лань»: ЭБС. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/322#book_name">https://e.lanbook.com/book/322#book_name</a>

#### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	<i>Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич - М.: Наука, 1978. - 388 с.</i>
6	<i>Евграфов М.А. Аналитические функции/ М.А.Евграфов. - М.: Наука, 1965. - 424 с.</i>
7	<i>Сборник задач по теории аналитических функций / М.А.Евграфов, К.А.Бежанов, Ю.В.Сидоров и др.; Под ред. М.А.Евграфова - М.: Наука, 1972. - 286 с.</i>
8	<i>Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1997. - Ч.2. - 416 с.</i>

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

№ п/п	Источник
9	<i>Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного //Изд-во «Лань»: ЭБС. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/322#book_name">https://e.lanbook.com/book/322#book_name</a></i>
10	<a href="http://www.math.vsu.ru">http://www.math.vsu.ru</a> – официальный сайт математического факультета ВГУ
11	<a href="http://www.math.msu.ru">http://www.math.msu.ru</a> – официальный сайт мехмата МГУ
12	<a href="http://e.lanbook.com">e.lanbook.com</a>

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	<i>Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для студ.вузов/ Л.И. Волковыский, Г.Л.Лунц, И.Г.Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. - 312 с.</i>

**17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

(при использовании лабораторного оборудования указывать полный перечень, при большом количестве оборудования можно вынести данный раздел в приложение к рабочей программе)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций:

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Комплексные числа. Комплексная плоскость.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
2.	Функции комплексного переменного и отображения множеств.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
3.	Элементарные функции.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
4.	Интеграл по комплексному переменному.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
5.	Интеграл Коши.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
6.	Последовательности и ряды аналитических функций.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
7.	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
8.	Ряд Лорана.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
9.	Изолированные особые точки однозначного характера.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
10.	Вычеты, принцип аргумента.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2,	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
			ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	
11.	Отображения посредством аналитических функций.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
12.	Аналитическое продолжение.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
13.	Гармонические функции.	ОПК-1 УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3. УК-1.1, УК-1.2.	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР)
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет, экзамен				Контрольные работы КИМы к экзамену

### Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

#### Пример:

Для оценивания результатов обучения на экзамене/зачете используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):

*(как пример):*

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом комплексного анализа;
  - 2) умение связывать теорию с практикой;
  - 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
  - 4) умение применять формулы, решать задачи;
- владение понятийным аппаратом данной области комплексного анализа (теоретическими основами дисциплины), способность иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач ....

Для оценивания результатов обучения на экзамене (зачете с оценкой) используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Для оценивания результатов обучения на зачете используется – зачтено, не зачтено  
Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<p>Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Продемонстрировано знание комплексного анализа, умение решать задачи ИЛИ</p> <p>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области комплексного анализа, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области комплексного анализа</p>	Повышенный уровень	Отлично Зачтено
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному (двум) из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Недостаточно продемонстрировано знание, или содержатся отдельные пробелы знания комплексного анализа ИЛИ</p> <p>Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен решать задачи., допускает ошибки при ответе.</p>	Базовый уровень	Хорошо Зачтено
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум(трем) из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное представление понятий комплексного анализа, допускает существенные ошибки в решении задач ИЛИ</p> <p>Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен отвечать на вопросы., не умеет применять знания</p>	Пороговый уровень	Удовлетворительно Зачтено
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем(четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.....</p>	–	Неудовлетворительно Не зачтено

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Сфера Римана.
2. Линейная функция комплексного переменного.
3. Функция  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Образ окружности  $|z - z_0| = R$  при отображении этой функцией.
4. Дробно-линейная функция. Структура отображения, задаваемого дробно-линейной функцией.
5. Показательная функция комплексного переменного. Комплексный логарифм. Определения и простейшие свойства.
6. Тригонометрические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
7. Гиперболические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.

8. Отображение плоскости посредством функции  $e^z$ .
9. Дифференцируемость функций в смысле комплексного анализа. Производная и дифференциал. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции в точке.
10. Теорема Коши-Римана.
11. Следствия из теоремы Коши-Римана. Гармонические функции. Сопряженные гармонические функции.
12. Интеграл от комплекснозначной функции действительного переменного. Модуль интеграла и оценка модуля интеграла.
13. Определение и простейшие свойства интеграла от функции комплексного переменного по кривой.
14. Оценка интеграла.
15. Аппроксимация интеграла интегральной суммой.
16. Аппроксимация интеграла по кривой интегралом по ломаной.
17. Теорема Коши-Гурса.
18. Теорема Коши-Гурса для многосвязной области.
19. Независимость интеграла от вида пути интегрирования.
20. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница.
21. Вывод интегральной формулы Коши.
22. Лемма о дифференцировании интеграла по параметру.
23. Интегральные формулы Коши для производных голоморфной функции. Следствие о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции.
24. Формула Тейлора.
25. Оценки производных голоморфной функции. Неравенства Коши.
26. Теорема Лиувилля.
27. Первая теорема единственности.
28. Нуль функции, кратность нуля. Представление голоморфной функции в окрестности нуля.
29. Изолированность нулей голоморфной функции.
30. Вторая теорема единственности. Следствие.
31. Последовательности голоморфных функций. Первая теорема Вейерштрасса.
32. Топология в пространстве голоморфных функций. Вторая теорема Вейерштрасса. Теорема Монтеля (без доказательства).
33. Ряды голоморфных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование.
34. Степенные ряды. Теорема Абеля. Формулы для коэффициентов.
35. Свойство круга сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
36. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
37. Ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.
38. Разложение функций, голоморфных в кольце, в ряд Лорана.
39. Особые точки. Виды особых точек.
40. Вычет функции в точке. Теорема Коши о вычетах.
41. Формула Лорана.
42. Вычисление вычета в полюсе. Частные случаи.
43. Голоморфность и особенности на бесконечности.
44. Разложение в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки.
45. Вычет функции на бесконечности. Теорема Коши о полной сумме вычетов.

46. Простейшие типы несобственных интегралов. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ .

47. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$ . Лемма Жордана.

48. Логарифмическая функция. Точка логарифмического ветвления.

49. Степенная функция с произвольным показателем степени. Точка алгебраического ветвления.

50. Логарифмическая производная и ее свойства.

51. Поле мероморфных функций. Приращение логарифма мероморфной функции.

52. Принцип аргумента.

53. Теорема Руше.

54. Основная теорема алгебры.

55. Теорема Гурвица о нулях последовательности голоморфных функций.

56. Принцип максимума модуля.

57. Лемма Шварца.

58. Дополнение к лемме Шварца.

## 20.2 Перечень практических заданий

1. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z) : D = \left\{ z : |z| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}$ ;

$$w = z^2.$$

2. Найти образ области  $D$  при отображении функцией

$$w = f(z) : D = \left\{ z : |z| = 2; \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}; \quad w = z^4.$$

3. Может ли функция быть дифференцируемой в точке  $z_0$  и не быть голоморфной в этой точке? Может ли функция, голоморфная в области, быть суммой двух функций, не голоморфных в этой области?

4. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении  $w = e^z$ .

5. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении  $w = \ln z$ .

6. Для функции  $f(z) = \sin \bar{z}$  указать точки, в которых существует производная  $f'(z)$ , и найти эту производную.

7. Вычислить  $\operatorname{th} \left( \ln 3 + \frac{\pi i}{4} \right)$ .

8. Вычислить  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$ .

9. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{1+it} dt$ .

10. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt$ .

11. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \bar{z} e^z dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = 1$  до точки

$$z_2 = i.$$

12. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \cos \bar{z} dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = \pi$  до точки

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + i.$$

13. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} z^2 \cos z dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = i$  до точки

$$z_2 = 1.$$

14. Найти нули функции  $f(z) = 1 + \cos z$  и определить их кратности.

15. Найти кратность нуля  $z_0 = 0$  для функции  $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$ .

16. Пусть  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Следует ли из этого, что  $f(z)$  – аналитическая функция внутри

замкнутой кривой  $\gamma$ ?

17. Вычислить интеграл  $\oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^2} dz$ .

18. Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ .

19. Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$ .

20. Функцию  $f(z) = \frac{1}{3-2z}$  разложить по степеням разности  $z-3$ .

21. Функцию  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$  разложить в ряд по степеням  $z$  и найти область сходимости

полученного ряда.

22. Может ли разложение некоторой функции в ряд Лорана по степеням разности  $z - z_0$  содержать:

- а) конечное число слагаемых с отрицательными степенями этой разности;
- б) конечное число слагаемых с положительными степенями этой разности;
- в) бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями этой разности;
- г) бесконечное число слагаемых с положительными степенями этой разности?

### 20.3. Перечень заданий для контрольных работ

1. Найти образ области  $D$  при отображении функцией

$$w = f(z) : D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}; \operatorname{Re} z > 0 \right\}; w = e^{2z}.$$

2. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z) : D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\};$

$$w = \operatorname{ctg} z.$$

3. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$ , где  $\gamma$  – линия, соединяющая точки  $z_1 = 0$  и

$$z_2 = 1 + 2i,$$

- а) отрезок прямой;
- б) дуга параболы;
- в) ломаная  $z_1 z_3 z_2$ , где  $z_3 = 1$ .

Почему получаются разные ответы?

4. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$ , где  $\gamma$ :

- а) отрезок прямой от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ ;
- б) дуга параболы  $y = 2x^2$  от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ . Почему получаются разные ответы?

5. Существует ли функция, аналитическая в точке  $z = 0$  и принимающая в точках

$$z = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ значения:}$$

а)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \dots;$

б)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots?$

6. Функция  $\sin \frac{1}{1-z}$  имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к точке 1, но тем не менее эта функция отлична от постоянной. Не противоречит ли это теореме единственности?

7. Вычислить интеграл  $\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \frac{z \sin zt}{z^2+1} dz, \quad t > 0.$

8. Вычислить интеграл  $\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z \cos zt}{(z+1)^2} dz, \quad t > 0.$

#### 20.4 Темы курсовых работ Нет курсовых работ

#### 20.5 Темы рефератов Не предусматривается

#### 20.6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме *устного опроса (индивидуальный опрос)*. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и/или практическое(ие) задание(я), позволяющее(ие) оценить степень сформированности умений и(или) навыков, и(или) опыт деятельности (*указывает реальную структуру*).

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.